درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

جلسه اول

۱-۱- تعریف سیگنال

سیگنال تابعي است که حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فیزیکي يك سیستم است.

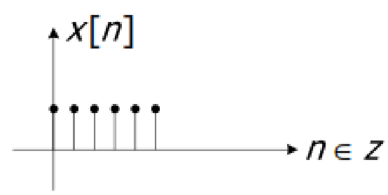
x[n] سیگنال زمان گسسته   x(t) سیگنال زمان پیوسته

t ,n متغیرهاي مستقل و x متغیر وابسته یا تابع مي‌باشد.

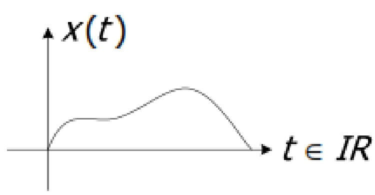
سیستم : مجموعه‌اي از اجزاي گرد آمده در کنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندي سیگنال‌ها

۱-۲-۱- سیگنال‌هاي زمان گسسته



۱-۲-۲- سیگنال‌هاي زمان پیوسته



بدیهي است که با نمونه‌برداري از سیگنال زمان پیوسته مي‌توان سیگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سیگنال‌هاي زوج و سیگنال‌هاي فرد

$x(t) = x(-t)$ Even , یا زوج $x[n] = x[-n]$

$x(t) = -x(-t)$ Odd, یا فرد $x[n] = -x[-n]$

تذکر ۱: سیگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

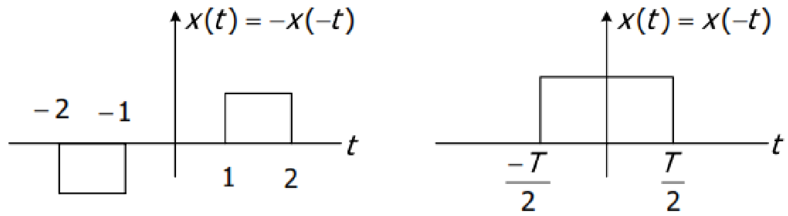
تذکر ۲: هر سیگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = Even(x(t)) + Odd(x(t))$$

$$Even(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$Odd(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

مثال ۱)



۱-۴- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب به سیگنالي گفته ميشود که در بازه‌هاي زماني مشخص عينا تکرار شده باشد.

$$x(t) = x(t+T) = x(t+kT) \quad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k \in Z$$

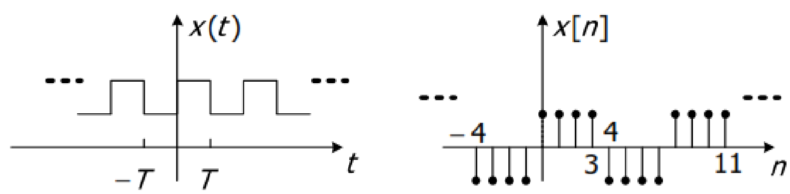
$$x[n] = x[n+N] = x[n+kN] \quad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad k \in Z$$

تذکر ۱: بديهي است که اگر T , N دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذکر۲: کوچکترين دوره تناوب دوره تناوب اصلي است (T در پيوسته، N در گسسته) و فرکانس تعريف شده با کوچکترين دوره تناوب، فرکانس اصلي است. (ω_0 در پيوسته، Ω_0 در گسسته)

تذکر۳: دوره تناوب سيگنال زمان پيوسته (T) بايد عدد مثبت باشد، درحاليکه دوره تناوب سيگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بايستي صحيح نيز باشد.

مثال ۲)



دوره تناوب اصلي $2T$ **دوره تناوب اصلي** $N = 8$

۱-۵- سیگنال‌هاي انرژي و توان

انرژي

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt \qquad E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

$$P_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt \qquad P_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

توان متوسط

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژي شناخته مي‌شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۱-۶- عمليات روي متغير وابسته

(1) $y(t) = Ax(t) \qquad y[n] = Ax[n]$

(2) $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

(3) $y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n]\cdot x_2[n]$

(4) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$

(5) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,d\lambda \qquad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

۱-۷- عمليات روي متغير مستقل

۱-۷-۱- شيفت زماني

$$y(t) = x(t-t_0) \qquad y[n] = x[n-n_0]$$

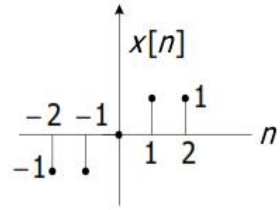
شيفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

شيفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

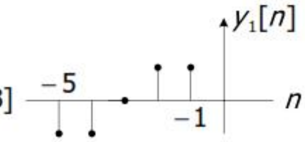
تذكر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سيگنال $x(t-t_0)$ از x(t) عقب‌تر است (به لحاظ زماني) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سيگنال $x(t-t_0)$ از x(t) جلوتر است.

تذكر ۲: در مورد سيگنال‌هاي زمان گسسته نيز بسته به اينكه n_0 مثبت و يا منفي باشد سيگنال x[n] را به راست و يا چپ به اندازه n_0 واحد شيفت مي‌دهيم تا y[n] بدست آيد.

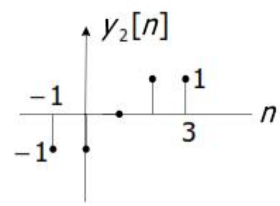
مثال ۳)



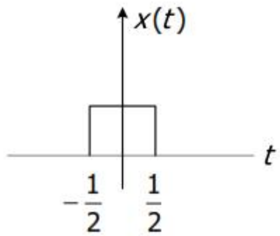
$y_1[n] = x[n+3]$



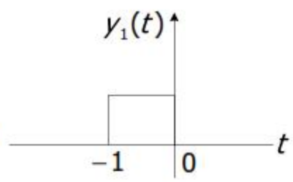
$y_2[n] = x[n-1]$



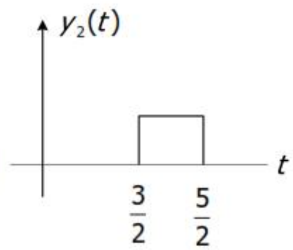
مثال ۴)



$y_1(t) = x(t + \frac{1}{2})$



$y_2(t) = x(t-2)$



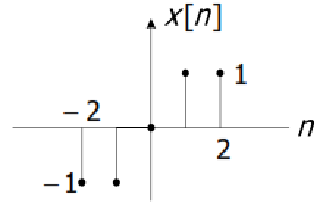
در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

۱-۷-۲- وارون‌سازي زماني

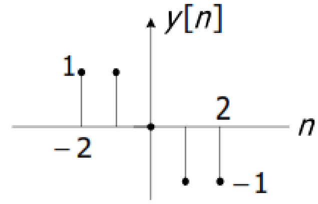
$$y[n] = x[-n] \qquad\qquad y(t) = x(-t) \qquad (2)$$

x(-t) يا x[-n] انعكاس x(t) و يا x[n] نسبت به محور قائم هستند.

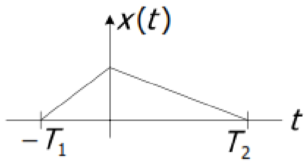
مثال ۵)

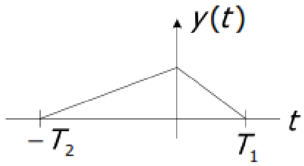


$y[n] = x[-n]$



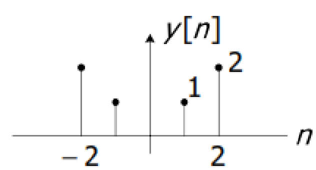
مثال ۶)



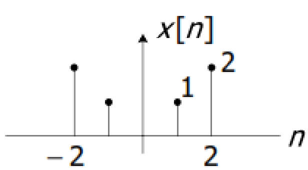


$y(t) = x(-t)$

مثال ۷)



$y[n] = x[-n]$



براي سيگنالي كه نه زوج و نه فرد است وارون زماني آن نه فرد و نه زوج است. اما براي سيگنال زوج وارون زماني زوج است ولي براي سيگنال فرد با توجه به خاصيت x[n]= -x[-n] وارون زماني آن -x[n] است.

۱-۷-۳- تغيير مقياس زماني

$$y(t) = x(at) \quad ; a \in IR \qquad (3)$$

$$y[n] = x[kn] \quad \text{يا} \quad y[n] = x[\frac{1}{k}n] \quad ; k \in Z$$

الف) اگر |a|>1 باشد y(t) فشرده شده سيگنال x(t) خواهد بود.

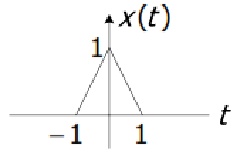
ب) اگر |a|<1 باشد y(t) باز شده سيگنال x(t) خواهد بود.

ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

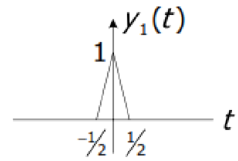
تذكر: در زمان پيوسته ماهيت سيگنال عوض نمي‌شود، اما در زمان گسسته ماهيت سيگنال تغيير مي‌كند و سيگنال جديدي بدست مي‌آيد.

جلسه دوم

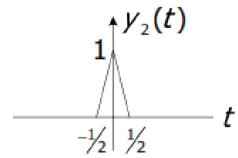
مثال ۸:



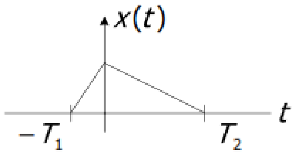
$y_1(t) = x(2t)$



$y_2(t) = x(-2t)$

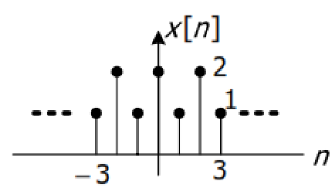


مثال ۹)



$y(t) = x(-\frac{1}{2}t)$

مثال ۱۰) $y_1[n] = x[2n]$, $N = 2$



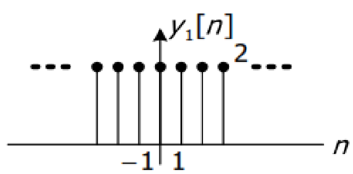
براي حل اينگونه مسائل به روش زير عمل مي‌كنيم:

با جايگذاري n در فرمول y[n] مقادير بدست آمده برحسب x[n] مي‌باشند.

$\vdots$

$y[-1] = x[-2] = 2$

$y[0] = x[0] =$



$y[1] = x[2] = 2$

$y[2] = x[4]$

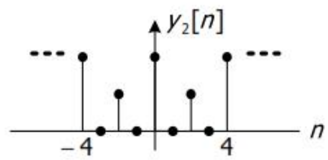
$\vdots$

دوره تناوب سيگنال جديد $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

تذکر: y[n]= x[kn] نسبت به x[n] فشرده شده، که برخي از مقادير را از دست مي‌دهد.

مثال ۱۱) $y_2[n] = x[\frac{1}{2}n]$

$$\vdots$$
$$y[-1] = 0$$
$$y[0] = x[0] = 2$$
$$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$$
$$y[2] = x[1] = 1$$
$$\vdots$$



دوره تناوب سيگنال جديد برابر $N = 4$ است.

تذکر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده که در نتيجه تعدادي صفر به y[n] اضافه خواهد شد. بدين ترتيب ماهيت سيگنال گسسته در اثر تغيير مقياس زماني تغيير مي‌کند.

تذکر: اگر سيگنال زمان پيوسته و يا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغيير مقياس زماني در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سيگنال جديد کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سيگنال جديد افزايش مي‌يابد.

۱-۷-۴- رسم سيگنال به روش منظم

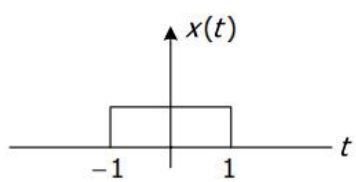
4)

$$y[n] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$
$$x[n] \to v[n] = x[n - n_0]$$
$$v[n] \to y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

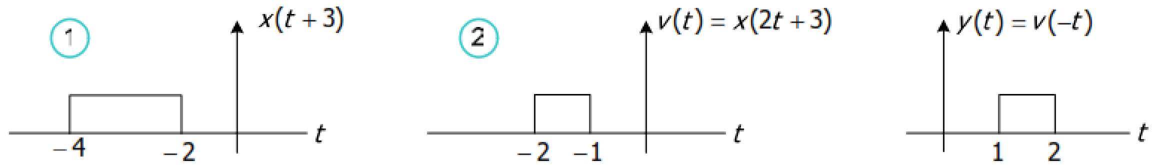
4)

$$y(t) = x(at - b)$$
$$x(t) \to v(t) = x(t - b)$$
$$\cancel{v(t)} \to y(t) = v(at) = x(at - b)$$

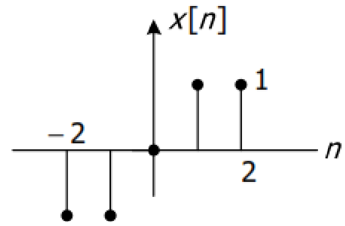
مثال ۱۲)



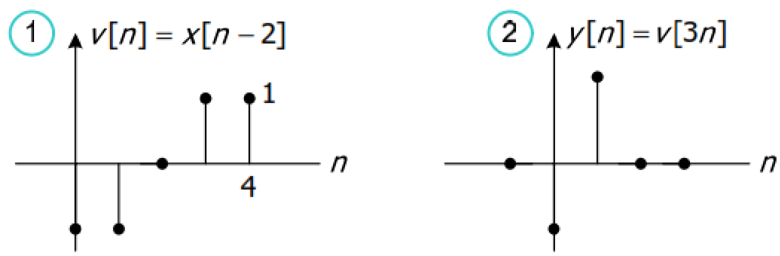
$y(t) = x(-2t + 3) = ?$



مثال ۱۳)

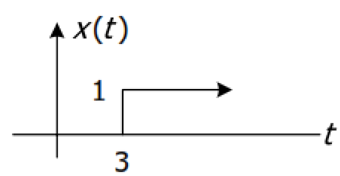


$$y[n] = x[3n-2] = ?$$

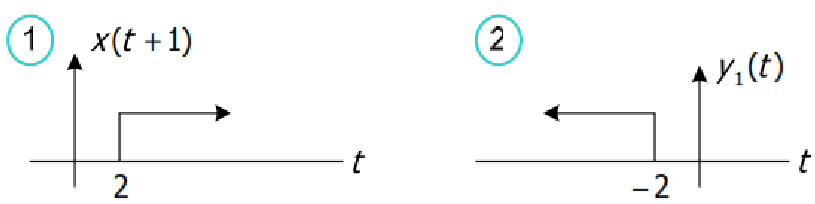


مثال ۱۴)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$



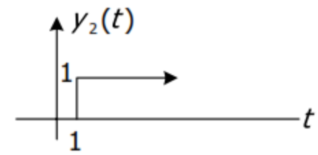
الف) $y_1(t) = x(1-t)$

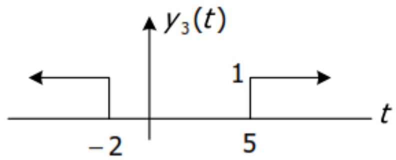


ب) $y_2(t) = x(3t)$

ج) $y_3(t) = x(1-t) + x(t-2)$

جلسه سوم

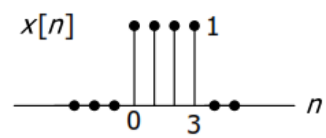


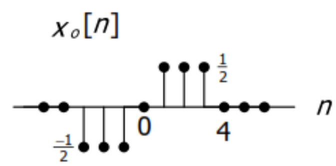


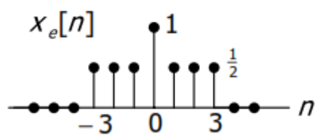
مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

میدانیم
$$\begin{cases}x_e=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])\\ x_o=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])\end{cases}$$





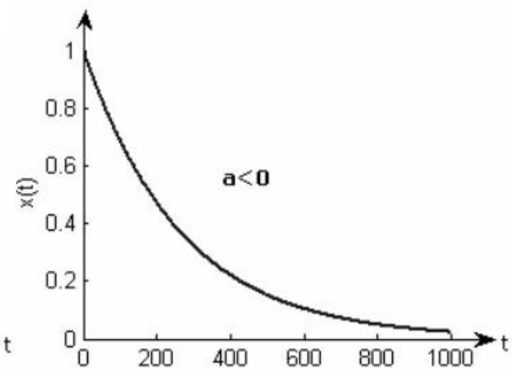


۱-۸- معرفي سيگنال‌هاي مهم

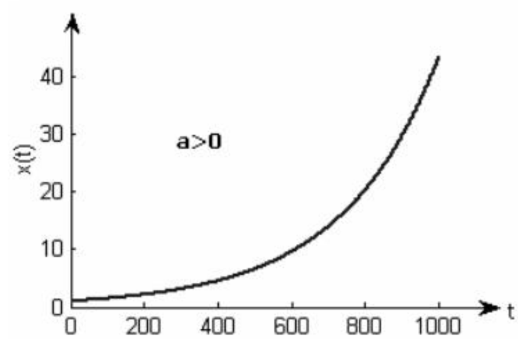
دراين قسمت چند سيگنال اساسي زمان پيوسته و زمان گسسته را معرفي مي‌كنيم. اين سيگنال‌ها نه تنها به دفعات پيش مي‌آيند بلكه توسط آنها مي‌توان سيگنال‌هاي پيچيده‌اي را فرموله و توليد كرد. مهم‌ترين كاربرد آنها در آزمايشگاه مشخص مي‌شود.

۱-۸-۱- سيگنال نمايي

زمان پيوسته $x(t) = Be^{at}$



الف) نمايي كاهشي



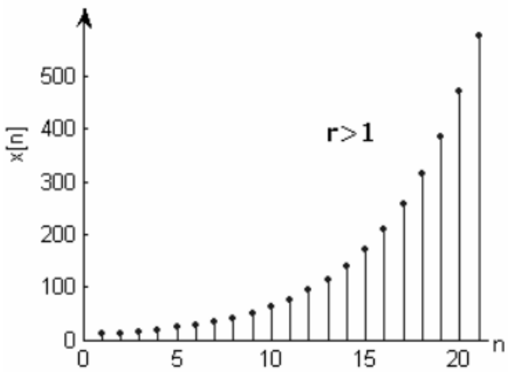
ب) نمايي افزايشي

با فرض اينكه $a, B \in IR$ باشند، با توجه به مثبت و يا منفي بودن a سيگنال نمايي به يكي از دو فرم افزايشي و يا كاهشي خواهد بود.

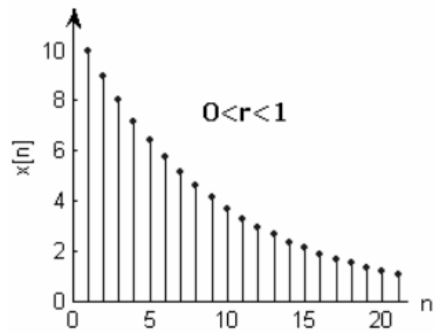
تذكر: چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي‌شود.

سگنال زمان گسسته $x[n] = B(r^{n})$

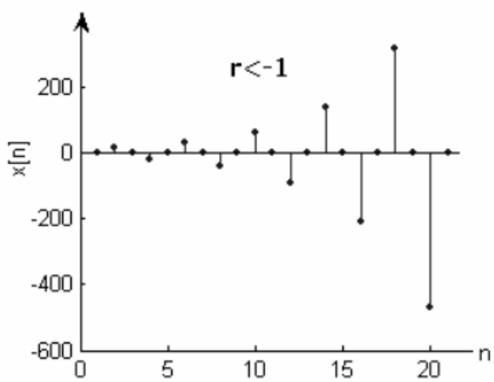
سيگنال زمان گسسته نمايي بسته به مقادير مختلف r چهار حالت مي‌تواند داشته باشد.



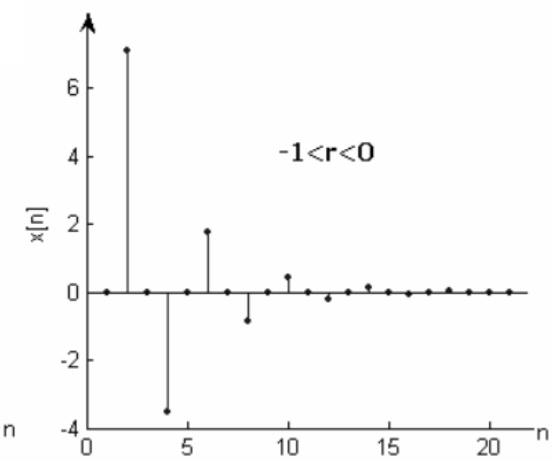
الف) نمايي افزايشي



ب) نمايي كاهشي



ج) نوساني افزايشي



د) نوساني كاهشي

۱-۸-۲- سيگنال سينوسي

زمان پيوسته $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ و $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

تذكر: سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال ۱)

الف) $x(t) = \cos(\frac{1}{6}t)$

$$\to T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

ب) $x(t)=\cos(\frac{8\pi}{31}t)$

$$\to T=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}$$

سيگنال زمان گسسته $x[n]=A\cos(\Omega n+\varphi)$ و $\Omega=2\pi f=\frac{2\pi}{N}$

تذكر: سيگنال زمان گسسته سينوسي به شرطي متناوب است كه بتوان $N\in Z^{+}$ را بدست آورد به نحوي كه $x[n]=x[n+N]$ گردد. (اين سيگنال برخلاف سيگنال زمان پيوسته سينوسي بعضا متناوب نيست.)

$$A\cos(\Omega n+\varphi)=A\cos(\Omega n+\Omega N+\varphi)\to \Omega N=2k\pi \quad , \quad k\in Z\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\Omega},N\in Z^{+}$$

مثال ۲)

الف)

$$x[n]=\cos[\frac{2\pi}{12}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12k=12$$, (k=1)

ب)

$$x[n]=\cos[\frac{8\pi}{31}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}k=31$$,(k=4)

ج)

$$x[n]=\cos[\frac{1}{6}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{1}{6}}=12k\pi$$ متناوب نيست

۱-۸-۳- سيگنال نمايي مختلط

زمان پيوسته $x(t)=B\,e^{-j\omega}$ يا $x(t)=Be^{j\omega t}$

$$x(t)=B\,e^{j\omega t}=B\cos(\omega t)+jB\sin(\omega t) \quad , \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

زمان گسسته $x[n]=B\,e^{-j\Omega}$ يا $x[n]=Be^{+j\Omega n}$

$$N\in Z^{+},K\in Z \quad , \quad N=\frac{2k\pi}{\Omega} \qquad x[n]=B\,e^{j\Omega n}=B\cos(\Omega n)+jB\sin(\Omega n)$$

تذكر ۱: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n]=Be^{+j\Omega n}$ مي‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اينکه در زمان نسبت به n مي‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نيز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n} \quad , \quad m \in z$$

تذکر ۳: اگر سيگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان بايد به حاصل جمع دو سيگنال تبديل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترك را به دست مي‌آوريم.

مثال ۳)

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \ldots \quad \Rightarrow T = 2\pi$$

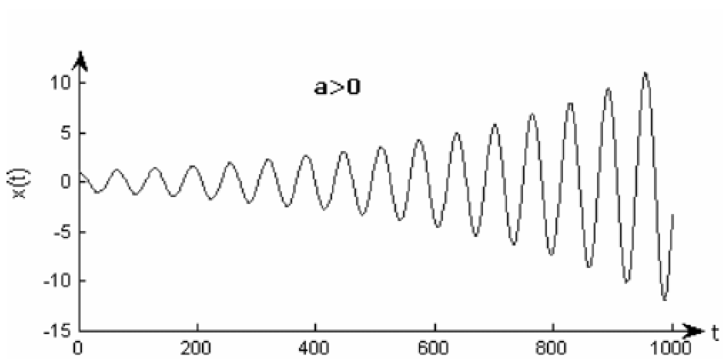
ب) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \ldots = 24 \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \ldots \qquad N = 24$$

۱-۸-۴- سيگنال سينوسي ميراشونده

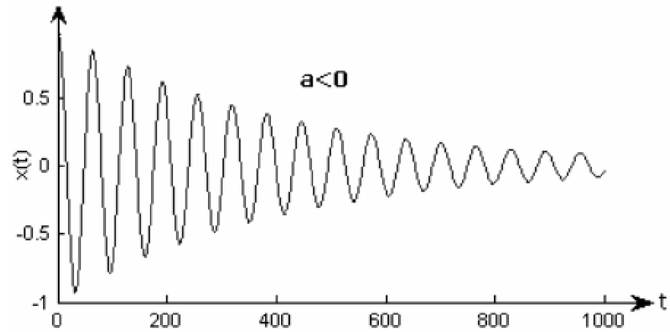
زمان پيوسته $\qquad x(t) = Be^{at}\cos(\omega t + \varphi)$

تذکر: سيگنال نمايي متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتي باعث مي‌شود که سيگنال نهايي متناوب نباشد.



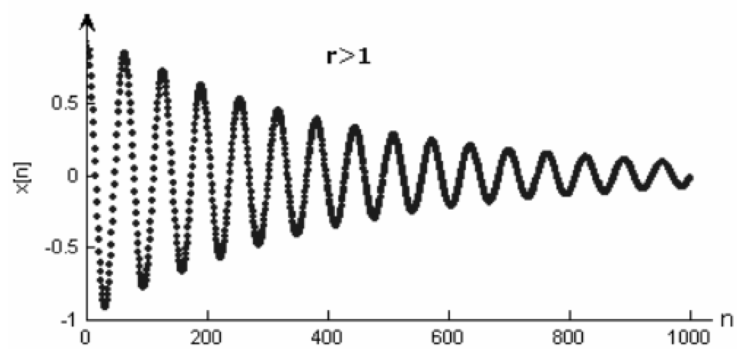
الف) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

جلسه چهارم

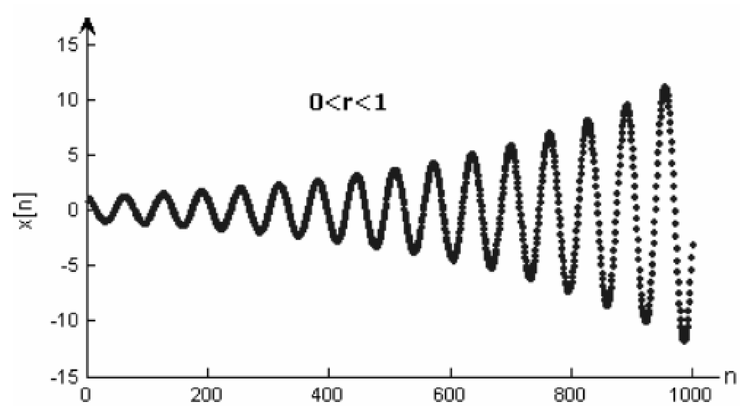


ب) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي

زمان گسسته $x[n] = B(r^n)\cos[\Omega n + \varphi]$



الف) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي



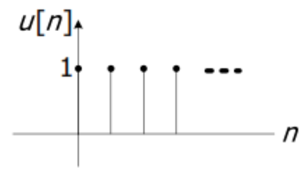
ب) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

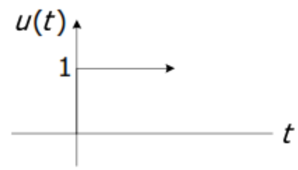
۱-۹-توابع ویژه

۱-۹-۱-تابع پله واحد

زمان گسسته $u[n] = \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

زمان پیوسته $u(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

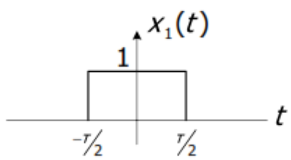




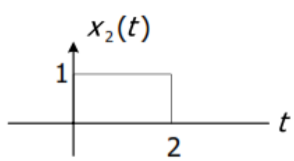
تذکر: توابعي که فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب تابع پله بيان کرد:

مثال ٤)

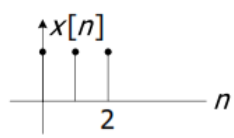
الف) $x_1(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})$



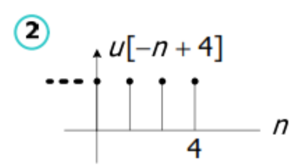
ب) $x_2(t) = u(t) - u(t-2)$

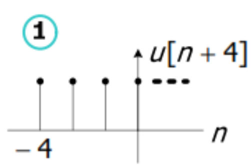


ج) $x[n] = u[n] - u[n-3]$

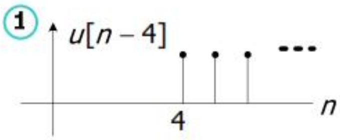


د) $u[-n+4]$



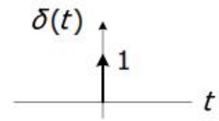


ن) $u[-n-4]$



۱-۹-۲-تابع ضربه

زمان پیوسته



$$\delta(t)=\begin{cases} \text{مقدار ویژه} & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{-1}\delta(t)dt=0$$

رابطه بين تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau$$

$$\lambda+t_0=\tau$$

-خواص:

۱) بيان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه:

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & t\geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t)=x(t)u(t)$$

مثال ۵)

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & t\geq 2 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t)=x(t)u(t-2)$$

۲) خاصيت غربالي تابع ضربه

$$x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)$$

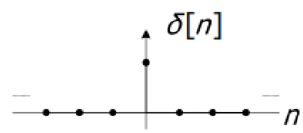
٤) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

*٥)

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

زمان گسسته



$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\dots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$
$$u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad\qquad \delta[n]=u[-n]-u[-n-1]$$

تابع ضربه چون تابعي زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

۱) بیان توابع چند ضابطه‌اي با یك ضابطه

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & n\le -2\\ 0 & o.w\end{cases}=x[n]u[-n-2]$$

۲) خاصیت غربالي تابع ضربه

جلسه پنجم

$$y[n] = x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳)انتگرال کانولوشن

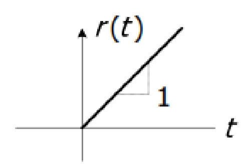
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] = x[n]$$

4) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

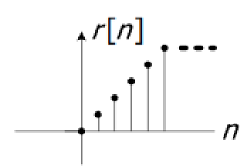


$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad r(t) = t\,u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\,d\lambda$$

زمان گسسته



$$r[n] = \begin{cases} n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

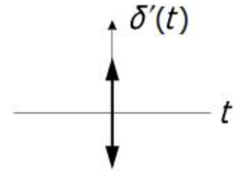
رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u[n] = ? \qquad r[n] = n\,u[n]$$

۱-۹-٤- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

خاصيت ۱)

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

اثبات:

$$(x(t)\cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$if\ f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow \quad = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\,\delta(t))'$$

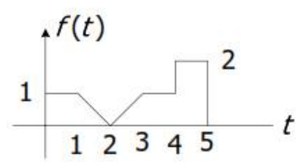
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

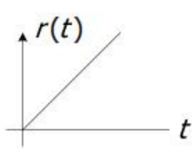
خاصيت ۲)

مثال ۷) مطلوب است بيان f(t) بر حسب توابع ويژه ؟

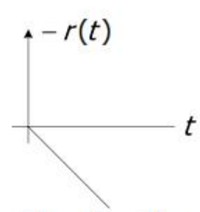


از منتهي اليه سمت چپ شروع به نوشتن مي‌كنيم. هر جا كه شكل تغيير كند يعني تابع عوض شده. اولين كاري كه انجام مي‌دهيم ضريب زاويه كليه خطها را بدست مي‌آوريم :

در فاصله $1 \le t \le 2$ شكل تغيير كرده و داراي شيب به سمت پايين است. در فاصله $2 \le t \le 3$ نيز شكل دوباره تغيير مي‌كند.



$$\begin{matrix}(2,0)\\(3,1)\end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix}(1,1)\\(2,0)\end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4)\_2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a\,e^{-t}$ هر يك از توابع زير را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم كنيد.

الف) $f_1(t) = f(t)\,u(t)$

حل

$$f_1'(t) = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$$
$$= f'(t)\,u(t) + f(0)\,\delta(t) + -a\,e^{-t}\,u(t) + a\,\delta(t)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} a\,e^{-t}\,dt = -a\,e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = a$$

ب) $f_2(t) = f(t-1)\,u(t-2)$

ج) $f_3(t) = f(t-1)\,u(t-1)$

د) $f_4(t) = f(t-1)\,u(t)$

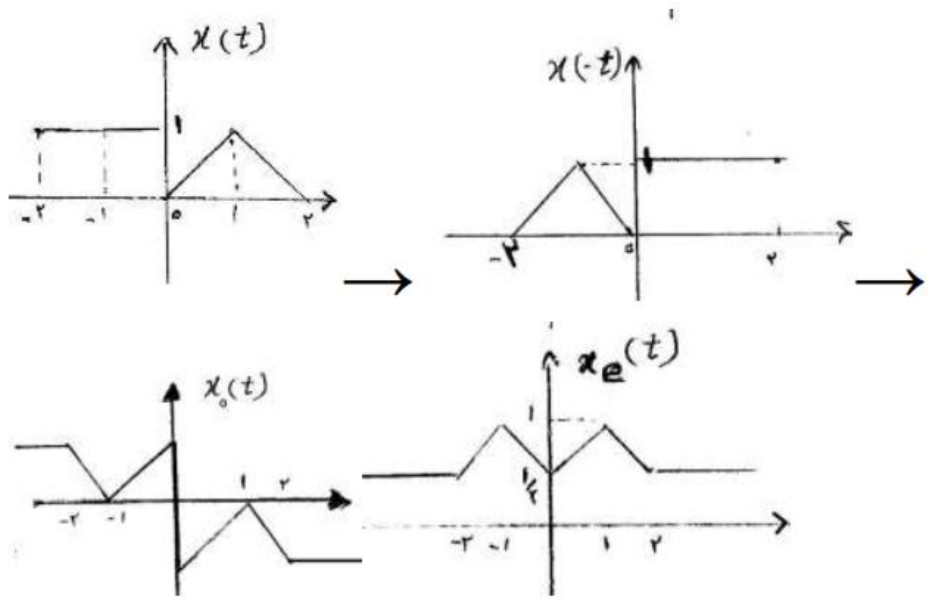
مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

1) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

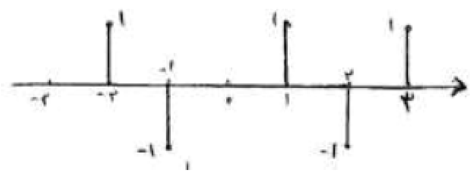
$$x_e(t) = \frac{e^{jt\omega_0} + e^{-jt\omega_0}}{2} = \cos t\omega_0$$

$$x_o(t) = \frac{e^{jt\omega_0} - e^{-jt\omega_0}}{2} = j\sin t\omega_0$$

2)



مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:



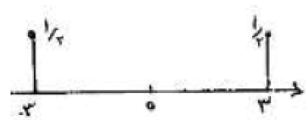
n[x]

$$x_e[-3] = \frac{x[-3]+x[3]}{2} = \frac{1}{2} = x_e[3]$$

$x_e[-2] = 0 = x_e[2]$

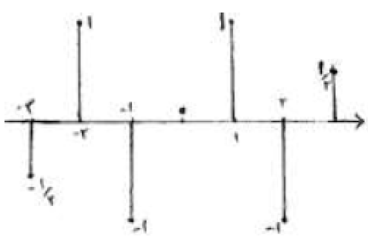
$x_e[-1] = 0 = x_e[1]$

$x_e[0] = 0$ $x_e[n]$



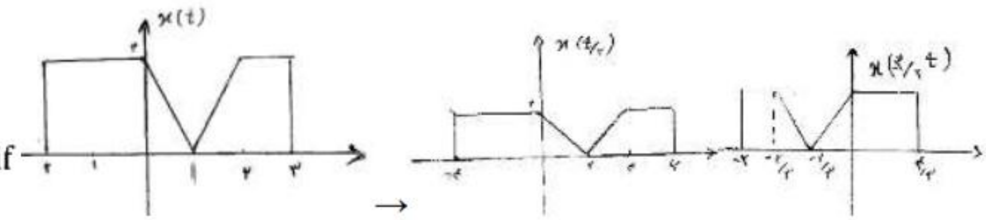
$x_o[-3] = \frac{1}{2} x_o[-2] = 1$

$x_o[-1] = -1 x_o[0] = 0 x_o[n]$

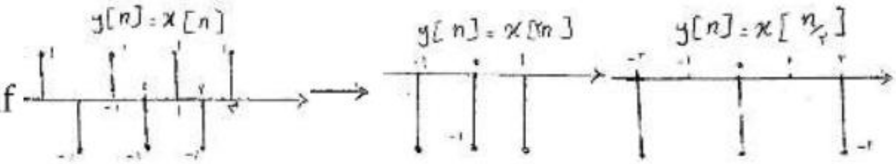


مثال)

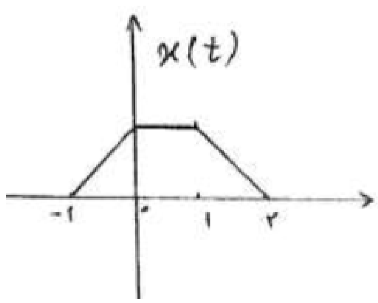
۱)

if 

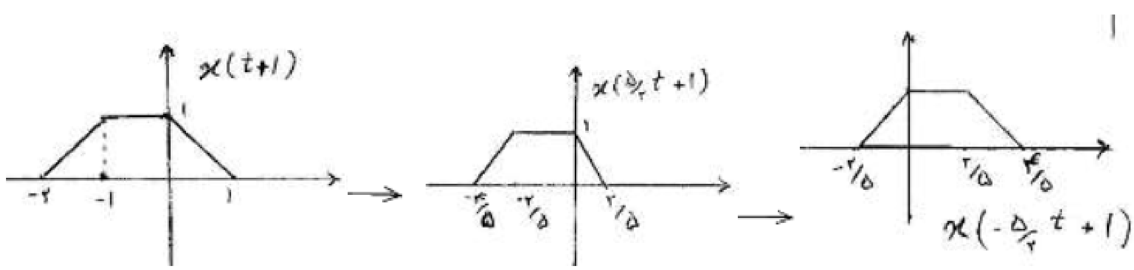
۲)

if 

مثال) اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد مطلوب است: $x(-\frac{5}{2}t+1)$

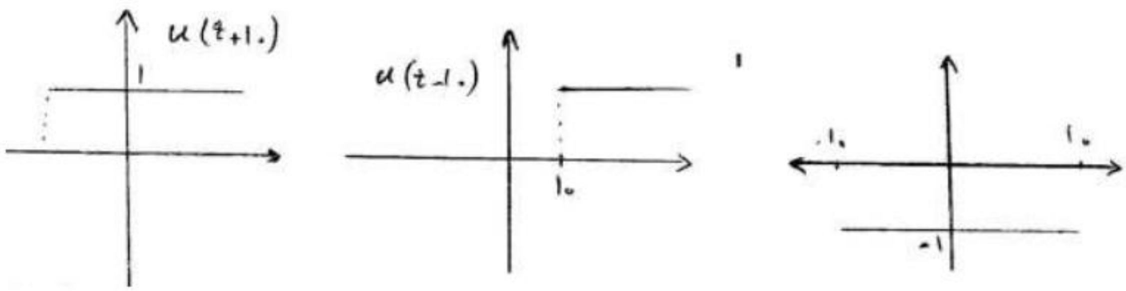


حل)



مثال) سیگنال های زیر را رسم کنید :

1) $x(t) = u(t-10) - u(t+10)$



2) $x(t) = u(-t+3) - u(t+3)$